

Kombinatorika

I. Ismétlés nélküli permutáció

Hányféle képpen lehet sorbarakni n db különböző dolgot?

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

n faktoriális

$$1! = 1$$

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$5! = 120$$

$$0! = 1$$

Pé: Hányféle képpen lehet sorbarakni egy piros, egy kék, egy zöld, egy sárga és egy lila golyót?

$$5! = 120$$

II. Ismétlés nélküli variáció

Hányféle képpen lehet kiválasztani n db különböző dologból k db-ot, ha számít a kiválasztás sorrendje?

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

Pé: Hányféle sorrend alakulhat ki a dohógán egy 15 lapos rajzokönyvben?

$$\frac{15!}{1} \cdot \frac{14!}{2} \cdot \frac{13!}{3} = 2730$$

$$\frac{15!}{(15-3)!} = \frac{15!}{12!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{12 \cdot 11 \cdot 10} = 2730$$

$$\frac{10!}{8!} = 9 \cdot 10 = 90$$

90 ^{n cr} ^{számítás} 5 db egyenlő
kiszámítása géppel

$$\frac{759!}{758!} = 759$$

III. Ismétlés nélküli kombináció ^{n cr}

Hányféle képpen lehet kiválasztani n db különböző
dologból k db-ot, ha nem számít a kiválasztás
sorrendje.

$$\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k} \quad \text{--- } n \text{ alatt } k!$$

Pé: lotó (90-ból 5)

ha számítana a sorrend akkor:

$$\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

ha nem számít a sorrend akkor:

$$\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5!} = \binom{90}{5} = 43949268$$

$$90 \text{ ncr } 5 = 43949268$$

IV. Ismétléses permutáció

Hányféle képpen lehet sorbarakni n db dolgot, ha
van köztük n_1, n_2, \dots, n_k db egyforma?

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

Pé: Hányféle képpen lehet sorbarakni 3 kék, egy piros
és 2 zöld golyót?

$$\frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{720}{6 \cdot 2} = \frac{720}{12} = 60$$

V Ismétléses variáció

Néhányféle képpen lehet kiválasztani n db különböző dologból k db-ot, ha számít a kiválasztás sorrendje úgy, hogy ugyanazt többre is választhatjuk.

$$n^k$$

Pl: A 11/6 (29 fő) matematikadolgozatot (n),
hányféle eredmény születhet?

$$\underbrace{[5]}_1 \cdot \underbrace{[5]}_2 \cdot \underbrace{[5]}_3 \cdot \dots \cdot \underbrace{[5]}_{25} = 5^{25} = 2.980.232.239 \times 10^{14}$$

Gyakorlás

1, Hányféle sorrendben lehet megenni 2 meggyt, 3 krémet és 1 kebabot?

2, Viki és Melinda cukrászdába megy. A választék
dobos torta, rigó f., almás pite, krémes és zserói.
Hányféle képpen választhatnak, ha mindenki
csak egy szeletet eszik és

a, választhatják ugyanazt.

b, nem választhatják ugyan azt.

$$1, \frac{6!}{2! \cdot 3!} = \frac{720}{2 \cdot 6} = \frac{720}{12} = 60$$

$$2, a, \frac{[5]}{V} = \frac{[5]}{M} = 25$$

$$b, \frac{[5]}{V} \cdot \frac{[4]}{M} = 20$$

3, Növényfélék bejében lehet megenni egy-egy példányt, tequilát, rumot, jégert és vodkát?

4, Réka gyümölcsös salátát készít. Van sárgadinnyésje, vanília, őszibarackja, ananásza és kivi. Növényfélék salátáit készíthet, ha növényfélék gyümölcsöt tesz bele!

3, $5! = 120$

4, $\binom{5}{3} = 10$

5, Növényfélék bejében lehet egy sárga, magyar kórtólól 9 lapot kiválasztani, hogy 5 zöld lap legyen köztük?

6, Hány 5 jegyű páros számot lehet készíteni a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből, ha ugyanazt többször is használhatjuk?

7, Hány 333 - Sz. Sz. Sz. típusú rendszer van?

5, $\binom{8}{5} \cdot \binom{24}{4} = 56 \cdot 10626 = 595056$

6, $|6| \cdot |7| \cdot |7| \cdot |7| \cdot |4| = 8232$

7, $\frac{|26|}{3} \cdot \frac{|26|}{3} \cdot \frac{|26|}{3} \cdot \frac{|10|}{52} \cdot \frac{|10|}{52} \cdot \frac{|10|}{52} = 17.576.000$

8, könyveket képpen választhatók ki a jelenlévőkből
6 embert dolgozatot írni!

$$\binom{18}{6} = 18564$$

9, könyveket képpen ülhetnek le egymás mellett?

$$6! = 720$$

10, könyveket eredmény oszlokat ha nem lesz 1-es?

$$\underbrace{1}_{1} \cdot \underbrace{1}_{2} \cdot \underbrace{1}_{3} \cdot \underbrace{1}_{4} \cdot \underbrace{1}_{5} \cdot \underbrace{1}_{6} = 1^6 = 1096$$

11, a 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből ^{hány} k jegyű szám
készíthető, ha

a, minden számjegy különböző

b, lehetnek egyformák

$$a, \underbrace{5}_{1} \cdot \underbrace{5}_{2} \cdot \underbrace{4}_{3} \cdot \underbrace{3}_{4} = 300$$

$$b, \underbrace{2}_{1} \cdot \underbrace{6}_{2} \cdot \underbrace{6}_{3} \cdot \underbrace{6}_{4} = 1080$$

12, egy polcon 30 könyv van, köztük 18 krimi.

Könyveket képpen választhatunk ki belőlük
10 könyvet, hogy hat krimi legyen köztük?

$$\binom{18}{6} \cdot \binom{12}{4} = 18564 \cdot 495 = 9189180$$

13. Csónok n féle műzsa, 3féle szemhéjfesték és 5féle alapozója van. Mennyféleképpen tudja kifesteni magát?

$$\binom{n}{r} \cdot \binom{3}{sz.} \cdot \binom{5}{a} = 60$$

14. Egy 20 fős gyereksapatot a labri környékén 5 fős turnusokban tudják megjelteni. Mennyféle képpen történehet az évad?

$$\binom{20}{5} \cdot \binom{15}{5} \cdot \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{5}^{11} = 15504 \cdot 3003 \cdot 252 \cdot 1$$

15. Mennyféle szó lehet alkotni a MATEMATIKA szó betűiből? 10 szó. 6 b. h.e.

$$\frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 3628800$$

16. Annát, Bétát és Kátát megkérdezik, hogy a matek magyar, tóni és angol érekségi közül melyiktől fel a legjobban? Mennyféle válasz adhatnak a lányok?

$$\binom{4}{A} \cdot \binom{4}{B} \cdot \binom{4}{K} = 4^3 = 64$$

1. Egy természettudományos vetélkedőn 3 fős csapat képviseli az iskolát: egy matematika, egy fizika és egy kémia felkészült diák. A matematikából Anna, Bianka, Csaba és Dáni, fizikából Éva, Fanni és Gábor, kémiából pedig Helga, Imre, Judit, Lili és Lajos esélyes a csapatba kerülésre.

a, Hányféleképpen állhat össze a vetélkedőn szereplő csapat?

b, Hány lehetőség van akkor, ha a csapatba csak lányok kerülnek?

$$a, \binom{4}{m} \cdot \binom{3}{f} \cdot \binom{5}{k} = 60$$

$$b, \binom{3}{3} \cdot \binom{2}{2} \cdot \binom{3}{3} = 18$$

2, Ági és Zoli esküvői meghívókat osztanak szét. Vasárnapra 5 meghívó maradt, Ági nagybátyjának, apai nagyzüleiének, Zoli nagynénjének, de'dinómójának és feltételvércének. Hányféle sorrendben kerestetik fel a meghívókat?

$$5! = 120$$

3, Gyümölcsalótót készítenek. Zöldségkezesülkre
 áll alma, köre, narancs, ananász, cser, szilva,
 őszibarack és kiwi. Könnyűfele gyümölcsalótó
 készíthet, ha 5 gyümölcsöt használunk fel,
 és mindegyikből 20 dbg -ot teszünk bele?

$$\binom{8}{5} = 56$$

4, egy 29 fős osztályba 18 lány jár. Könnyűfeleképpen
 válasszhatunk ki egy 10 fős küldöttséget az
 osztályból, amelyben k fiú van?

$$\binom{18}{6} \cdot \binom{11}{k} = 18564 \cdot 330 = 6126120$$

5, Hét kirgyszereket kell megjelölnünk 1-1 órcát
 kempírral. Könnyűfele esetet eddig's lehetséges,
 ha minden kempírré vaját, lekvárt vagy mézet
 kenhetünk 1-1 kempírré csak egyféle't kenünk

$$\binom{3}{1} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{3}{3} \cdot \binom{3}{4} \cdot \binom{3}{5} \cdot \binom{3}{6} \cdot \binom{3}{7} = 2187$$

6, Könnyűfele sorrendben chetünk meg egy rajtós,
 2 róntóskulcsos, 3 skardiniás és 1 kavicsos
 szendvicsot?

$$\frac{7!}{2! \cdot 3!} = \frac{5040}{2 \cdot 6} = \frac{5040}{12} = 420$$

7, Megkérdezték egy iskola 12 D osztályára járó 3 könyv, hogy a matematika, történelem, angol és magyar érettségik közül melyektől félnek a legjobban.

Hányféle választ adhatnak a könyvek?

$$\underbrace{[4]}_{1k} \cdot \underbrace{[4]}_{2k} \cdot \underbrace{[4]}_{3k} = 4^3 = 64$$

8, Szanyi moziba rözi Dórt, Dórtet, Dórtöt és Vikit.

a, Hányféleképpen ülhetnek le, ha egymás mellett szöla (egyre)?

b, Hányféleképpen, ha Dóra és Viki egymás mellett akar ülni?

a, $5! = 120$

b, $\underbrace{[4]}_{Dóra} \cdot \underbrace{[3]}_{Dórt} \cdot \underbrace{[2]}_{Dórtöt} = 24 \cdot 2 = 48$ Viki és Dóra helyét cserélhet

$4! \cdot 2 = 24 \cdot 2 = 48$

9, Utána elmennek egy bárba. Hányféleképpen ülhetnek le egy körasztalhoz.

Köztelt rendelt a könyveknek.

A választék: pina colada, gin tonic, martini, és sex on the beach.

Hányféleképpen választhatnak?

b, $\underbrace{[4]}_{1k} \cdot \underbrace{[4]}_{2k} \cdot \underbrace{[4]}_{3k} \cdot \underbrace{[4]}_{4k} = 4^4 = 256$ 4 különböző dolgot

a, $S \quad E \quad E \quad E \quad V$ ha körasztalra rakunk

szöla, akkor $4! \cdot 4!$ számolunk

$\frac{5!}{5} = 4!$

10, Kétféleképpen egy kártyát hazaküldeni egy másikkal
pedig elküldeni a számbát.

Kétféleképpen választható?

$$4 \cdot 3 = 12$$

Gyakorlás

1, Kétféleképpen lehet egy csomag magyarkártya-
tyúdtól 13 lapot kiválasztani úgy, hogy
4 tük, 3 piros és 5 zöld legyen köztük?

$$\binom{8}{4} \cdot \binom{8}{3} \cdot \binom{8}{5} \cdot \binom{8}{1} = 70 \cdot 56 \cdot 56 \cdot 8 = 1756160$$

2, Hogy B - SZ - SZ - SZ - B típusú rendszert
képezhetők? 26 a betűk száma

$$\frac{26!}{3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3!} = 676000$$

3, Kétféleképpen tud egymás mellé állni
3 Opel, 4 BMW és 2 Suzuki, ha az azonos
márkájúakat nem különböztetjük meg?

$$\frac{9!}{3! \cdot 4! \cdot 2!} = \frac{362880}{6 \cdot 24 \cdot 2} = \frac{362880}{288} = 1260$$

4, Kétféleképpen választhatjuk meg egy 5 fős
bányabapat minden tagját egy számítógépre
ha a választható 4 file név?

$$\binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{4} \binom{4}{5} = 4^5 = 1024$$

5, Könnyfelékeppen lehet, egy újságosbóde' egyik polcára 8 Népszabadságot, 5 Magyar Nemzetet és 3 Magyar Nirlapot?

$$\frac{16!}{8! \cdot 5! \cdot 3!} = \frac{2092278989 \cdot 10^{13}}{10320 \cdot 120 \cdot 6} = 720720$$

29030400

6, egy feladatgyűjteményben 300 matek, 150 fizika és 70 kémia feladat van.

Könnyfelé feladatsort lehet összeállítani, amiben mindhárom tárgyból két feladat van!

$$\binom{300}{2} \cdot \binom{150}{2} \cdot \binom{70}{2} = 44850 \cdot 11175 \cdot 2415 = 1.210394981 \cdot 10^{12}$$

7, egy zártkörűn 5 döntéshozó vanja a tárgyalást 3 hozsiönizetbe helyezni.

Könnyfelékeppen választhatók ki?

$$\binom{5}{3} = 10$$

8, 6 ügyvéd van akit hivatalból kinevelnek a védelmükre 5 vádlók.

Könnyfelé keppen védhetik őket, ha egy ügyvédnek csak 1 ügye lehet?

$$\binom{6}{1} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{3}{4} \cdot \binom{2}{5} = 720$$

Ciklikus permutáció

n különböző dolgot körben $(n-1)!$ felleképpen lehet sorbarakni.

9. Szépségversenyt rendeznek az osztályban.

8 kategória van. (csak nők indulhatnak)

Nőgyűlele díjazás lehet, ha egy ember csak egy kategóriában indulhat, ill. ha-

akörny kategóriában indulhat. 9 lány

$$a, \begin{array}{|c|} \hline 8 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 7 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 5 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 6 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 7 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 8 \\ \hline \end{array} = 362880$$

$$b, \begin{array}{|c|} \hline 9 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline 9 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline 9 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline 9 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline 9 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline 9 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline 9 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline 9 \\ \hline \end{array} = 9^8 = 43046721$$

10. Egy beadandó dolgozatban a 10 kijelölt feladatról hatot kell megoldani. Nőgyűlele beadandó készíthet.

$$\binom{10}{6} = 210$$

11. Nőgyűlele olyan vanalkból készíthető amiben 5 vékony, 3 vastag és 6 közepes szik van?

$$\frac{11!}{5! \cdot 3! \cdot 6!} = 168168$$

12. A piros, zöld és fehér színű kártyákkal
hány vízszintesen háromszoros zószó készíthető?

$$\lfloor 3 \rfloor \cdot \lfloor 2 \rfloor \cdot \lfloor 2 \rfloor = 12$$

Ha függőlegesen is lehetnek

a szókak akkor: $\lfloor 3 \rfloor \cdot \lfloor 2 \rfloor \cdot \lfloor 2 \rfloor = 12 \cdot 2 = 24$

13. A 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek felbontásával
4 jegyű páros szám készíthető, ha lehetnek
bennük egyforma számjegyek.

$$\frac{\lfloor 6 \rfloor \cdot \lfloor 7 \rfloor \cdot \lfloor 7 \rfloor \cdot \lfloor 4 \rfloor}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1176$$

14. A 1233522 számjegyeket átcsoportosítással
hány 7 jegyű szám készíthető?

$$\frac{7!}{2! \cdot 3!} = \frac{5040}{2 \cdot 6} = \frac{5040}{12} = 420$$

1, 2, 3, 4, 5 hány 5 jegyű számot lehet
kérni?
 5^5

Égy számjegyre csak 1-szer szerepelhet.
 $5!$

hány db. 3 jegyű számot lehet kérni? ismétlés
nélküli
 $5 \cdot 4 \cdot 3$
→ ismétléses
 5^3

hány db. ismétlés nélküli kombináció

$$\binom{n}{k}$$

1 2 3 4 (5) 3 jegyű számot

$$\frac{5!}{1! \cdot 4! \cdot 3!} = 36$$

1. 2. 3.

5

1 2 3 4 5 6 hány 6-os osztályú kombinációt.

$$\binom{6}{h} =$$

6 elemű halmazonak hány kéthalmaz van?

$$2^6$$

Matematika azonosítói

I. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

II. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

III. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

IV. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

V. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

VI. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

pl: $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

$$\frac{(8^5 \cdot 32^{-3})^4 \cdot 16^2}{128^{-5} \cdot 64^7} = \frac{((2^3)^5 \cdot (2^5)^{-3})^4 \cdot (2^4)^2}{(2^7)^{-5} \cdot (2^6)^7} = \frac{(2^{15} \cdot 2^{-15})^4 \cdot 2^8}{2^{-35} \cdot 2^{42}} = \frac{2^{60} \cdot 2^{-60} \cdot 2^8}{2^{-35} \cdot 2^{42}}$$

$$\frac{2^8}{2^7} = 2^1$$

$$\frac{(16^{-3} \cdot 4^9)^2 \cdot 128^7}{64^6 \cdot (8^{-7} \cdot 32^5)^3} = \frac{((2^4)^{-3} \cdot (2^2)^9)^2 \cdot (2^7)^7}{(2^6)^6 \cdot ((2^3)^{-7} \cdot (2^5)^5)^3} = \frac{(2^{-12} \cdot 2^{18})^2 \cdot 2^{49}}{2^{36} \cdot (2^{-21} \cdot 2^{25})^3}$$

$$\frac{2^{-24} \cdot 2^{36} \cdot 2^{49}}{2^{36} \cdot 2^{63} \cdot 2^{-75}} = \frac{2^{61}}{2^{27}} = 2^{34}$$

$$\frac{(9^5 \cdot 27^{-4})^3 \cdot 3^7}{81^6 \cdot (3^{-4} \cdot 243^2)^{-4}} = \frac{((3^2)^5 \cdot (3^3)^{-4})^3 \cdot 3^7}{(3^4)^6 \cdot ((3^{-4} \cdot (3^5)^2)^{-4})} = \frac{(3^{10} \cdot 3^{-12})^3 \cdot 3^7}{3^{24} \cdot (3^{-4} \cdot 3^{10})^{-4}} = \frac{3^{30} \cdot 3^{-36} \cdot 3^7}{3^{24} \cdot 3^{16} \cdot 3^{-40}}$$

$$= \frac{3^1}{3^0} = 3$$

$$\left(\frac{a^3}{a^2} \cdot \frac{b^4}{b^5} \cdot \frac{c^4}{c^5}\right)^5 = \frac{a^{15}}{a^10} \cdot \frac{b^20}{b^25} \cdot \frac{c^20}{c^25} = a^5 \cdot b^{-5} \cdot c^{-5}$$

$$\left(\frac{a^2}{a} \cdot \frac{b^3}{b^5} \cdot \frac{c}{c^2}\right)^4 \cdot \left(\frac{a^5}{a^6} \cdot \frac{b^4}{b^3} \cdot \frac{c^5}{c^2}\right)^{-2} = \frac{a^8}{a^4} \cdot \frac{b^{12}}{b^{20}} \cdot \frac{c^4}{c^4} \cdot \frac{a^{-10}}{a^{-12}} \cdot \frac{b^{-15}}{b^{-6}} \cdot \frac{c^{-10}}{c^{-4}} = a^4 \cdot b^{-8} \cdot c^0 = a^4 \cdot b^{-8}$$

$$\left(\frac{x^7}{x^4} \cdot \frac{y^5}{y^3} \cdot \frac{z}{z^2}\right)^6 \cdot \left(\frac{x^6}{x^5} \cdot \frac{y^2}{y} \cdot \frac{z^5}{z^7}\right)^{-2} = \frac{x^{42}}{x^{24}} \cdot \frac{y^{30}}{y^{18}} \cdot \frac{z^6}{z^{12}} \cdot \frac{x^{-12}}{x^{-10}} \cdot \frac{y^{-4}}{y^{-2}} \cdot \frac{z^{-10}}{z^{-14}} = x^{18} \cdot y^{12} \cdot z^{-6} \cdot x^2 \cdot y^{-2} \cdot z^4 = x^{20} \cdot y^{10} \cdot z^{-2}$$

Több kiterős hatványok

$$a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$$

$$\text{pl. } h^{\frac{1}{2}} = \sqrt{h^1}$$

$$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8^1} = 2$$

Négyzetgyökök: a nem negatív számoknak van.

A nem negatív szám négyzetgyöke, az a nem negatív szám, aminek a négyzete A

jele \sqrt{A}

$$\sqrt{a^2} = |a| \text{ abszolútérték}$$

Állítások:

$$\text{I. } \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\text{II. } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\text{III. } \sqrt{a^x} = (\sqrt{a})^x$$

n. gyök

n. = n-dik

ha n páros: egy nemnegatív A szám n. gyöke az a nemnegatív szám, aminek az n. hatványa A.

$$\text{Pl: } \sqrt[6]{64} = 2 \quad \text{mert } 2^6 = 64$$

ha n páratlan: egy A szám n. gyöke az a szám, aminek n. hatványa A.

$$\text{Pl: } \sqrt[3]{-8} = -2 \quad \text{mert } -2^3 = -8$$

azonosságok

lásd mint a négyzetgyöknél

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$$

Törtkitevőjű hatvány:

$$a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^0 = 1$$

$$\sqrt[x]{x^5} = x^{\frac{5}{x}}$$

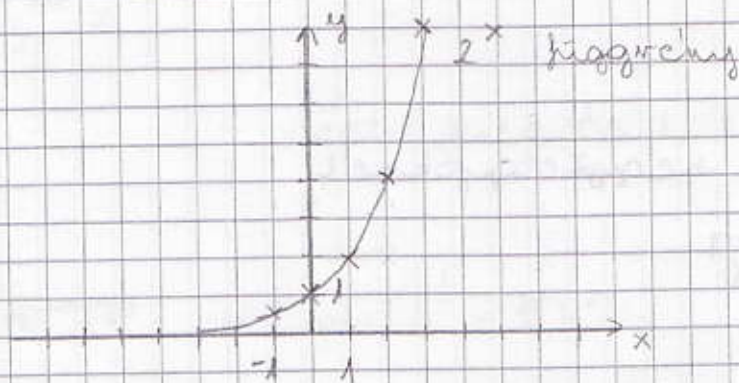
$$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

Exponenciális függvények

hatvány függvény: $x \mapsto x^n$

exponenciális függvény $x \mapsto a^x$
($a \in \mathbb{R}^+$) racionális azaz
valós szám

I. $a > 1$ pl $x \mapsto 2^x$



30. mely szám nulladik hatványa 1

$$2^{-1} = \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad 2^0 = \frac{1}{2^0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{8} = 2^{-3}$$

$$4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$$

$$\frac{1}{128} = 2^{-7}$$

$$2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

$$\frac{1}{81} = 3^{-4}$$

$$3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

$$\frac{1}{125} = 5^{-3}$$

$$2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$$

$$\frac{1}{32} = 2^{-5}$$

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$$

$$\frac{1}{36} = 6^{-2}$$

$$4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$$

$$\frac{1}{5} = 5^{-1}$$

$$1^{-8} = \frac{1}{1^8} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 1, \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{2^3}} = 1 \cdot \frac{2^3}{1} = 2^3 = 8$$

ditűnik

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

$$2, \left(2^{-1}\right)^{-3} = 2^3 = 8$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 1,$$

$$2, 3^2 = 9$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{-1} = 1,$$

$$2, 7^1 = 7$$

Jellemzés:

Értelmezési tartomány: \mathbb{R} minden valós szám halmaza
x tengely

Érték készlet: pozitív valós számok \mathbb{R}^+ halmaza
y tengely

Zérus hely: nincs nem megy át a 0 ponton

Szélső érték: nincs se maximum, se minimum

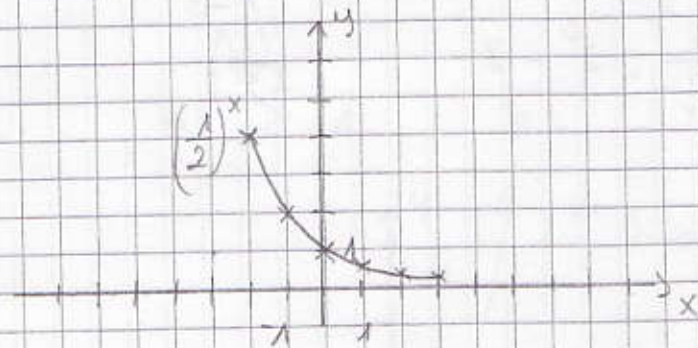
Monotonitás: szigorúan monoton nő szigorúan mon. nő
x tengely

II $a = 1$ $x \mapsto 1^x$



mindenhol 1.

III $0 < a < 1$ $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$



$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$
$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$
$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$

Jellemző:

értelmezési tartomány:

monotonitása: szig. mon. csökken.

dx potenciális egyenletek

$$8^{2x+5} \cdot 4^{x-5} = 16^{6+5x}$$

$$(2^3)^{2x+5} \cdot (2^2)^{x-5} = (2^4)^{6+5x}$$

$$2^{6x+15} \cdot 2^{2x-10} = 2^{24+20x}$$

$$2^{8x+9} = 2^{24+20x}$$

$$8x+9 = 24+20x \quad | -8x$$

$$9 = 24+12x \quad | -24$$

$$-15 = 12x \quad | :12$$

$$-\frac{15}{12} = x$$

Hf: $16^{x+5} \cdot 32^{6x-3} = 8^{3x+5}$ 2

$$2^4 \cdot 2^{5-7x} = 2^{3+x}$$
 3

$$2^{6x-7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7-5x} = 2^{3+x}$$
 2

$$16^{x+5} \cdot 32^{6x-3} = 8^{3x+5}$$

$$(2^4)^{x+5} \cdot (2^5)^{6x-3} = (2^3)^{3x+5}$$

$$2^{4x+20} \cdot 2^{30x-15} = 2^{9x+15}$$

$$2^{34x+5} = 2^{9x+15}$$

$$34x + 5 = 9x + 15 \quad | -9x$$

$$25x + 5 = 15 \quad | -5$$

$$25x = 10 \quad | :25$$

$$x = \frac{10}{25}$$

$$27^{4x+3} \cdot 9^{5-7x} = 81^{3+x}$$

$$(3^3)^{4x+3} \cdot (3^2)^{5-7x} = (3^4)^{3+x}$$

$$3^{12x+9} \cdot 3^{10-14x} = 3^{12+4x}$$

$$3^{19-2x} = 3^{12+4x}$$

$$19 - 2x = 12 + 4x \quad | +2x$$

$$19 = 12 + 6x \quad | -12$$

$$7 = 6x \quad | :6$$

$$\frac{7}{6} = x$$

$$2^{6x-7} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+2} = 64^{5-4x}$$

$$2^{6x-7} \cdot (2^{-2})^{3x+2} = (2^6)^{5-4x}$$

$$2^{6x-7} \cdot 2^{-6x-4} = 2^{30-24x}$$

$$2^{-11} = 2^{30-24x}$$

$$-11 = 30 - 24x \quad | -30$$

$$-41 = -24x \quad | \cdot (-24)$$

$$\frac{41}{24} = x$$

$$6^4 \cdot 7x - 5 \cdot 128 = 32 \cdot (8 - 2x) \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{4+7x}$$

$$(2^6)^{7x-5} \cdot (2^7)^{3x+6} = (2^5)^{8-2x} \cdot (2^{-4})^{4+7x}$$

$$\frac{42x - 30}{2} \cdot 2 = \frac{21x + 42}{2} = 2 \cdot \frac{40 - 10x}{2} \cdot \frac{-16 - 28x}{2}$$

$$\frac{63x + 12}{2} = 24 - 38x$$

$$63x + 12 = 48 - 76x \quad | + 76x$$

$$139x + 12 = 48 \quad | - 12$$

$$139x = 36 \quad | : 139$$

$$x = \frac{36}{139}$$

$$9^{5x+6} \cdot \left(\frac{1}{81}\right)^{3-2x} = 243^{5x+2} \cdot 27^{4+8x}$$

$$(3^2)^{5x+6} \cdot (3^{-4})^{3-2x} = (3^5)^{5x+2} \cdot (3^3)^{4+8x}$$

$$\frac{10x+12}{3} \cdot 3 = \frac{25x+10}{3} \cdot 3 \cdot \frac{12+24x}{3}$$

$$\frac{18x}{3} = \frac{49x+22}{3}$$

$$18x = 49x + 22 \quad | - 49x$$

$$-31x = 22 \quad | \cdot (-31)$$

$$x = \frac{-22}{31}$$

$$3 \cdot 2^{x+1} - 7 \cdot 2^x + 5 \cdot 2^{x+2} = 152$$

$$3 \cdot 2^x \cdot 2^1 - 7 \cdot 2^x + 5 \cdot 2^x \cdot 2^2 = 152$$

$$6 \cdot 2^x - 7 \cdot 2^x + 20 \cdot 2^x = 152$$

$$19 \cdot 2^x = 152 \quad | : 19$$

$$2^x = 8 = 2^3$$

$$x = 3$$

$$5 \cdot 3^x - 4 \cdot 3^{x+2} + 2 \cdot 3^{x+1} = -225$$

$$5 \cdot 3^x - 4 \cdot 3^x \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^x \cdot 3^1 = -225$$

$$5 \cdot 3^x - 36 \cdot 3^x + 6 \cdot 3^x = -225$$

$$-25 \cdot 3^x = -225 \quad | : (-25)$$

$$3^x = 9 = 3^2$$

$$x = 2$$

$$7 \cdot 2^{x+2} - 11 \cdot 2^{x+1} - 3 \cdot 2^x = 192$$

$$7 \cdot 2^x \cdot 2^2 - 11 \cdot 2^x \cdot 2^1 - 3 \cdot 2^x = 192$$

$$28 \cdot 2^x - 22 \cdot 2^x - 3 \cdot 2^x = 192$$

$$3 \cdot 2^x = 192 \quad | : 3$$

$$2^x = 64 = 2^6$$

$$x = 6$$

$$8 \cdot 3^{x+1} - 7 \cdot 3^{x+2} + 2 \cdot 3^x = -999$$

$$8 \cdot 3^x \cdot 3^1 - 7 \cdot 3^x \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^x = -999$$

$$24 \cdot 3^x - 63 \cdot 3^x + 2 \cdot 3^x = -999$$

$$-37 \cdot 3^x = -999 \quad | : -37$$

$$3^x = 27 = 3^3$$

$$x = 3$$

$$9 \cdot 2^x - 7 \cdot 2^{x+2} + 5 \cdot 2^{x+1} = -288$$

$$9 \cdot 2^x - 7 \cdot 2^x \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^x \cdot 2^1 = -288$$

$$9 \cdot 2^x - 28 \cdot 2^x + 10 \cdot 2^x = -288$$

$$-9 \cdot 2^x = -288 \quad | : (-9)$$

$$2^x = 32 = 2^5$$

$$x = 5$$

$$7 \cdot 3^{x+2} - 8 \cdot 3^{x+1} - 5 \cdot 3^x = 2754$$

$$7 \cdot 3^x \cdot 3^2 - 8 \cdot 3^x \cdot 3^1 - 5 \cdot 3^x = 2754$$

$$63 \cdot 3^x - 24 \cdot 3^x - 5 \cdot 3^x = 2754$$

$$34 \cdot 3^x = 2754 \quad | : 34$$

$$3^x = 81 = 3^4$$

$$x = 4$$

$$4^x + 2 \cdot 2^x - 24 = 0$$

$$(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 24 = 0$$

$$(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 24 = 0$$

$$2^x = y$$

$$y^2 + 2y - 24 = 0$$

$$y_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = 1$$

$$b = 2$$

$$c = -24$$

$$y_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-2 \pm 10}{2}$$

$$y_1 = \frac{-2 + 10}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$y_2 = \frac{-2 - 10}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

I

$$2^x = 4 = 2^2$$

$$x = 2$$

II

$$\cancel{2^x = -6}$$

$$2 \cdot 9^x - 8 \cdot 3^x - 90 = 0$$

$$2 \cdot (3^x)^2 - 8 \cdot 3^x - 90 = 0$$

$$3^x = y$$

$$2y^2 - 8y - 90 = 0$$

$$a = 2$$

$$b = -8$$

$$c = -90$$

$$y_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-90)}}{2 \cdot 2} = \frac{8 \pm \sqrt{784}}{4} = \frac{8 \pm 28}{4}$$

$$y_1 = \frac{8 + 28}{4} = \frac{36}{4} = 9$$

$$y_2 = \frac{8 - 28}{4} = \frac{-20}{4} = -5$$

$$\text{I. } 3^x = 9 = 3^2$$

$$x = 2$$

$$\text{II. } 3^x = -5$$

$$4^x - 9 \cdot 2^x - 112 = 0$$

$$(2^x)^2 - 9 \cdot 2^x - 112 = 0$$

$$2^x = y$$

$$y^2 - 9y - 112 = 0$$

$$a = 1$$

$$b = -9$$

$$c = -112$$

$$y_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-112)}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm \sqrt{529}}{2} = \frac{9 \pm 23}{2}$$

$$y_1 = \frac{9 + 23}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

$$y_2 = \frac{9 - 23}{2} = \frac{-14}{2} = -7$$

$$\text{I. } 2^x = 16 = 2^4$$

$$x = 4$$

$$3 \cdot 9^x - 21 \cdot 3^x - 2h = 0$$

$$3 \cdot (3^x)^2 + 21 \cdot 3^x - 2h = 0 \quad 3^x = y$$

$$3y^2 + 21y - 2h = 0 \quad a = 3 \quad b = 21 \quad c = -2h$$

$$y_{1,2} = \frac{-21 \pm \sqrt{(-21)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2h)}}{2 \cdot 3} = \frac{-21 \pm \sqrt{288}}{6} = \frac{-21 \pm 2\sqrt{72}}{6}$$

$$y_1 = \frac{-21 + 2\sqrt{72}}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$y_2 = \frac{-21 - 2\sqrt{72}}{6} = \frac{-48}{6} = -8$$

$$\text{I, } 3^x = 1 = 3^0 \\ x = 0$$

$$4^x + 5 \cdot 2^x - 1h = 0$$

$$(2^x)^2 + 5 \cdot 2^x - 1h = 0 \quad 2^x = y$$

$$y^2 + 5y - 1h = 0 \quad a = 1 \quad b = 5 \quad c = -1h$$

$$y_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1h)}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{8h}}{2} = \frac{-5 \pm 2\sqrt{2h}}{2}$$

$$y_1 = \frac{-5 + 2\sqrt{2h}}{2} = \frac{h}{2} = 2$$

$$y_2 = \frac{-5 - 2\sqrt{2h}}{2} = \frac{-1h}{2} = -\frac{h}{2}$$

$$\text{I, } 2^x = 2 = 2^1$$

$$x = 1$$

$$2 \cdot 9^x - 50 \cdot 3^x - 108 = 0$$

$$2 \cdot (3^x)^2 - 50 \cdot 3^x - 108 = 0 \quad 3^x = y$$

$$2y^2 - 50y - 108 = 0 \quad a = 2 \quad b = -50 \quad c = -108$$

$$y_{1,2} = \frac{50 \pm \sqrt{(-50)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-108)}}{2 \cdot 2} = \frac{50 \pm \sqrt{3364}}{4} = \frac{50 \pm 58}{4}$$

$$y_1 = \frac{50 + 58}{4} = \frac{108}{4} = 27$$

$$y_2 = \frac{50 - 58}{4} = \frac{-8}{4} = -2$$

$$\text{I, } 3^x = 27 = 3^3 \\ x = 3$$

$$4^x - 5 \cdot 2^x - 24 = 0$$

$$(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x - 24 = 0 \quad 2^x = y$$

$$y^2 - 5y - 24 = 0 \quad a = 1 \quad b = -5 \quad c = -24$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{5 \pm 11}{2}$$

$$y_1 = \frac{5 + 11}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$y_2 = \frac{5 - 11}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$\text{I, } 2^x = 8 = 2^3 \\ x = 3$$

$$3 \cdot 9^x + 12 \cdot 3^x - 63 = 0$$

$$3 \cdot (3^x)^2 + 12 \cdot 3^x - 63 = 0$$

$$3^x = y$$

$$3y^2 + 12y - 63 = 0$$

$$a = 3$$

$$b = 12$$

$$c = -63$$

$$y_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-63)}}{2 \cdot 3} = \frac{-12 \pm \sqrt{900}}{6} = \frac{-12 \pm 30}{6}$$

$$y_1 = \frac{-12 + 30}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

$$y_2 = \frac{-12 - 30}{6} = \frac{-42}{6} = -7$$

$$I_1 \quad 3^x = 3 = 3^1$$

$$x = 1$$